

行政院國家科學委員會專題研究計畫成果報告

桁架式三明治複合材料構件之最佳設計

Optimal Design of Truss-Type Sandwich Composite Materials Parts

計畫編號：NSC 90-2212-E-164-002

執行期限：90 年 8 月 1 日至 91 年 7 月 31 日

主持人：賴峰民 修平技術學院工業管理系

一、中文摘要

本研究採用兩種方法（預浸樹脂編織成型法及純纖維編織後再含浸樹脂成型法）來研製桁架式三明治複合材料構件。本研究所開發的桁架式三明治複合材料結構構件可用作減重型的結構件，且其內可作各方向性的電路的配線，液、氣壓管的配管，較現今的各類複合材料所開發的產品更具減重與使用性。

茲就複合材料構件的力學行為分析、破壞模態分析、挫曲強度分析、最佳化設計、實體製造及實驗量測等方面進行研究。並應用最佳設計方法設計桁架心材的組成方式，結合破壞準則及最佳設計方法以尋求桿件的最佳編織角度與層數，以尋求最佳的構件排列方式，使得桁架式三明治複合材料構件的重量輕、強度大，且能承受載重最大。

關鍵詞：複合材料，桁架、三明治結構、最佳設計、破壞分析、製程。

Abstract

Composite sandwich structures have been widely used in the fields of mechanical, marine and aerospace engineering. In general, honey comb, plastic foam or corrugated plates have been used to make the core of the composite sandwich structures. In this project, a truss-type sandwich structure is developed. This structure can create more space in the core for, e.g., placing pipes or storing oil. The goal of this project is accomplished via strength analysis, optimum design, manufacturing process, nondestructive evaluation and testing of the truss-type sandwich structures. The project will

comprise three sub-projects which will study in depth on topics in the above areas. Find failure strength of truss sandwich composite structures for different designs and determine material properties by specimen testing.

Keywords: composite materials, truss, sandwich structure, reliability, optimal design, fatigue design, nondestructive evaluation, manufacturing process.

二、緣由與目的

複合材料三明治構件具强度高、重量輕，耐腐蝕且抗彎性佳的優點，非常適合取代部份金屬結構構件，以降低其他的耗用，如飛機機身及機翼部份，可減少油料的使用。另現今已大量採用複合材料三明治構件在建築體的材料方面，然材料所佔有的體積較大，甚且其內部空間多為填充發泡材料。但是發泡材料的脆性較高，故受衝擊時結構中間發泡材料層強度較低容易成為首先破壞處，而承受衝擊的能力較弱，且內部空間無法善加利用。因此；本計劃在一定的強度下，如能再行改變內部填充空間並善加運用，不但可達體積的減小，甚可善用內部空間，供電路、液壓等管路佈施或作油料儲存之用。有鑑於欲發展可達多方向性佈線的桁架式三明治複合材料結構，以達到强度高、減重、減空間、耐磨蝕等目的。

過去國內外學者對複合材料進行各種受力情況研究[1-3]，而 Whiteney 及多位學者以有限元素研究三明治結構的力學行為 [4-6]，而其 Adali 及多位學者以最佳化的考量設計複合材料板件或三明治構件 [7-9]。在製程方面；材料的選用與成化製程皆有可查[10-11]，對其檢測方

式另因材料不同於金屬材料而另定之 [12-14]。然而；過去國內外學者的研究主要係探討層板或三明治構件的各種破壞模式、相對應的勁度衰減模式及最佳化設計，卻未曾提出開發桁架式三明治複合材料結構的研究。因此；本計劃研究桁架式三明治複合材料結構的構件及面板之破壞模式與挫曲強度，在最佳化設計時需同時考慮構件及面板的破壞模式與挫曲強度等複雜限制條件，才能達到實體的最佳化設計模式。

本研究發展有限元素及最佳設計方法，進一步探討設計參數（如構件排列方式、構件形狀與尺寸、纖維編織角度和層組厚度）求取其全域的最佳設計參數值，以使桁架式三明治複合材料結構的重量最輕、能承受載重最大。所以，本研究利用一階剪變形理論分析桁架式三明治複合材料結構的載重-位移、應力、應變、首層破壞載重、破壞後的勁度衰減的模式及最佳化設計，並藉由實驗值與理論值之比較，以修改理論分析模式，達到符合實際的分析模式與最佳化設計模式。而本計畫獲得破壞模式分析及最佳化設計模式，具學術參考及應用價值，並藉一些例子來說明所提方法之功能及應用。

三、研究方法

(1) 理論分析

本計畫所研發的桁架式三明治複合材料構件可應用在各類可內部佈管之結構體，將分為力學分析模式建立、最佳化設計，製造，試驗及等四方向探討桁架式三明治複合材料構件的降伏強度分析、挫曲強度分析、破壞強度、最佳排列方式、最佳桿件形狀、最佳構件尺寸、材料性質與製程參數（纖維角度、層組厚度、烘烤溫度及時間）的關係，以獲得結構體重量輕、強度大的最佳設計參數。

本計畫將研究桁架式三明治複合材料構件(圖一)的編織路徑、桁架桿件的角度及構件的組合方式，首先開發程式分析軟體、破壞模式分析與最佳化設計方法。在

此過程中有多項強度資料、破壞模態、最佳排列方式與製程參數，所獲結果供其他子計畫使用。其強度分析及編織路徑、角度的分析如下：

如圖一所示，桁架核心元素的邊長為 L_c ，核心元素厚為 H_c ，兩者的角度關係為

$$\varphi_c = \sin^{-1}(H_c / L_c) \quad (1)$$

如核心元素為圓狀，則其半徑為 R_c ；至於其圓表面的長度 (L_f) 與半徑 (R_f) 關係則為

$$L_f = \sqrt{3(L_c^2 - H_c^2)} \quad (2)$$

另，其每單位面積下的重量是

$$W = 2\sqrt{3}\pi\rho \left[2\frac{R_f^2}{L_f} + \frac{L_c R_c^2}{L_f^2} \right] \quad (3)$$

設定一組無因次設計參數為

$$\underline{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (R_f / l, L_f / l, R_c / l, H_c / l) \quad (4)$$

則其有四項力方面的約束條件需滿足，方可達最佳化編織狀態

1. 面元素的降服應力

$$\frac{1}{\sqrt{3\pi}} \left[\frac{V^2}{EM} \right] \left[\frac{E}{\sigma_y} \right] x_1^{-2} x_2 x_4^{-1} \leq 1 \quad (5)$$

2. 面元素的挫曲應力

$$\frac{4}{\sqrt{3\pi^3}} \left[\frac{V^2}{EM} \right] x_1^{-4} x_2^3 x_4^{-1} \leq 1 \quad (6)$$

3. 核心元素的降服應力

$$\frac{1}{\pi} \left[\frac{V^2}{EM} \right] \left[\frac{E}{\sigma_y} \right] x_2 x_3^{-2} x_4^{-1} \sqrt{x_4^2 + x_2^2 / 3} \leq 1 \quad (7)$$

4. 核心元素的挫曲應力

$$\frac{4}{\pi^3} \left[\frac{V^2}{EM} \right] x_2 x_3^{-4} x_4^{-1} (x_4^2 + x_2^2 / 3)^{3/2} \leq 1 \quad (8)$$

運用以上各幾何關係式建立編織的路徑與角度。

(2) 最佳化設計

本研究最佳化設計是在已知桁架核心元素的邊長為 L_c ，核心元素厚為 H_c ，及其半徑為 R_c ，並受限於某些限制條件下，求

取面板及核心元素之各層組的最佳纖維編織角度($\underline{\theta}$)與厚度(\underline{h})，最佳表面的長度(L_f)與半徑(R_f)，及可承受最大的載重(P)，以獲得桁架式三明治複合材料構件的重量最輕、強度高的設計目標。用數學式表示可寫成

$$\text{Minimize } W(\underline{h}, \underline{\theta}, R_f, L_f, P) = 2\sqrt{3}\pi\rho \left[2\frac{R_f^2}{L_f} + \frac{L_c R_c^2}{L_f^2} \right]$$

$$\text{Subject to } 0 \leq \theta_i \leq \pi$$

$$h_i \geq 0 \quad ; \quad \theta_i = m_i \theta_0 \quad (9)$$

$$h_i = q_i h_0 \quad i = 1, \dots, NL$$

$$P_c \geq P \quad ; \quad P_b \geq P$$

其中 W 為重量 (目標函數)； $\underline{\theta} = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{NL})^t$ 和 $\underline{h} = (h_1, h_2, \dots, h_{NL})^t$ 分別為每一層組之纖維編織角度及厚度； ρ 為複材層之密度； L_f, R_f 分別為核心元素之圓表面的長度與半徑； m_i, q_i 為整數； θ_0 和 h_0 為製造限制常數。 P_c, P_b 分別為面板及核心元素所能承受最大的壓力及挫曲負荷。茲利用兩階段的最佳化設計方法來求解複合材料三明治殼結構件受限制條件下之問題，尋找最佳的製造時纖維角度和厚度。

在第一階段的最佳設計中，纖維角度和層厚假設為連續的設計變數，其目標函數導入格蘭因子可寫為

$$\Psi = W(\underline{\theta}, \underline{h}) + \sum_{j=1}^{NL} [\mu_j x_j + r_p x_j^2] + [\eta \phi + r_p \phi^2]$$

$$x_j = \max[g_j(h_j), \frac{-\mu_j}{2r_p}]$$

$$g_j(h_j) = -h_j \leq 0 \quad j = 1, \dots, NL-1$$

$$g_j(h_j) = -h_c \leq 0 \quad j = NL \quad (10)$$

$$\phi = \max[H(\underline{\theta}, \underline{h}), \frac{-\eta}{2r_p}]$$

$$H(\underline{h}, \underline{\theta}) = P - P_c \leq 0$$

其中 μ_j, η, r_p 為係數。在這最佳設計階段中，設計參數 ($\underline{\theta}, \underline{h}$) 假設為連續變數。

當完成第一階段的最佳設計後，便可針對製造束制進行第二階段的最佳設計，此

時面板之層數可由下式決定

$$N = \begin{cases} \text{Int}[\frac{h-h_c}{h_0}] & \text{for } \frac{h-h_c}{h_0} = \text{Int}[\frac{h-h_c}{h_0}] \\ \text{Int}[\frac{h-h_c}{h_0}] + 1 & \text{for } \frac{h-h_c}{h_0} > \text{Int}[\frac{h-h_c}{h_0}] \end{cases} \quad (11)$$

其中 $\text{Int}[\cdot]$ 為括弧內數值之整數項。

而整數 m_i 和 q_i 的可能值為

$$m_i \in \left\{ \text{Int}[\frac{\theta_i}{\theta_0}], \text{Int}[\frac{\theta_i}{\theta_0}] + 1 \right\} \quad (12)$$

$$q_i \in \left\{ \text{Int}[\frac{h_i}{h_0}], \text{Int}[\frac{h_i}{h_0}] + 1 \right\}$$

在此階段最佳設計問題用數學式表示可寫為

$$\begin{aligned} \text{minimize } & W(\tilde{\underline{\theta}}, \tilde{\underline{h}}) \\ \text{subject to } & P_c \geq P \end{aligned} \quad (13)$$

$$N = \sum_{i=1}^{NL-1} n_i$$

其中 $\tilde{\theta}_i = m_i \theta_0$ 和 $\tilde{h}_i = n_i h_0$ ($i = 1, \dots, NL-1$)； $\tilde{h}_{NL} = \tilde{h}_c$ 。上述之最佳化問題可用 branch and bound 方法來求解，若 NL 值不大則可直接用組合方法來求解。利用此一具束制條件的全域最佳化設計方法來研究桁架式三明治複材構件的輕量化設計，以使構件的重量最輕、強度最大。

四、結果與討論

本研究所推導一階剪變形理論的有限元素法不僅考慮了側向的剪應變，然而在探討應力沿厚度方向上的變化時，本人發現材料力學忽略了第三軸應力的影響，而分層理論則考慮了厚度的影響效應。當疊層數較少且厚度較薄時分層理論與薄殼理論的準確性都相當高，但疊層數較多且厚度較厚時一階剪變形理論要比薄殼理論來的精確，其結果如表一、二所示。

在最佳化部分，本研究採用兩階段的最佳化設計技巧能夠精確的尋找出桁架式三明治複合材料構件的最佳製程參數(如纖維角度、層組厚度)，如表三所示。因此本研究發現當層組 $NL=3$ 時，其角度為 $[45_1/-45_2]_s$ ；而 $NL=4$ 時，則角度為

$[45_1/-45_1/45_2]_s$ 。

五、計畫成果自評

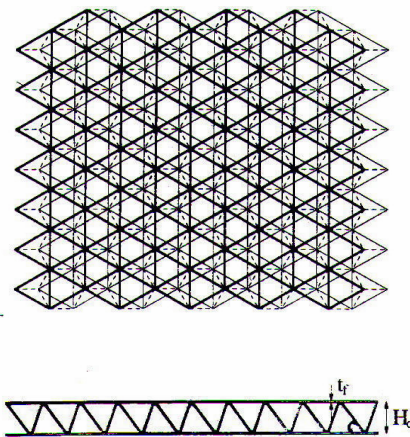
本研究以建立多層理論之殼元素的分析模式及最佳化設計技巧，可以準確的分析及設計桁架式三明治複合材料構件的強度與最佳製程參數，也藉實驗數據預估構件之最佳製程參數，所獲得之結果將提供產業界做研究桁架式三明治複合材料構件的分析、設計和檢測之用。本研究成果擬將投稿於 *Computers & Structures* 期刊或在國內外會議中發表。

六、參考文獻

1. Reddy, J. N., "a Penalty Plate-Bending Element for the Analysis of Laminated Anisotropic Composite Plate," *Int. J. for Num. Meth.* In Eng. 15(1980) 1187-1206
2. Reddy, J. N. and Pandey, A. K., "A First-Ply Failure Analysis of Composite Laminates", *Computers and Structure*, 25(3) (1987), 371-393..
3. Pandya, B. N. and Kant, T., "Flexural Analysis of Laminated Composites Using Refined High-Order C Plate Bending Elements," *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 66(1988), 173-198.
4. Whitney, J. M., "Shear Analysis of Thick Laminated Composite and Sandwich Plates," *J. Compos. Mater.*, 6(1972), 426-440.
5. Kam, T. Y. and Sher, H. F., and Chao, T. N., "Prediction of First-Ply Failure Strengths of Laminated Composite Plates Using a Finite Element Approach," *International Journal of Solids & Structure*, 33(3), 375-398.
6. Pandya, B. N., and Kant, T., "high-order Shear Deformable Theories for Flexure of Sandwich Plate-Finite Element Evaluations," *Int. J. Solids Struct.*, 24(1988), 1267-1286.
7. Adali, S. and Duffy, K. J., "Design of Antisymmetric Hybrid Laminates for Maximum Buckling Load: I. Optimal Fiber Orientation," *Composite Structures*, 14(1990), 49-60.
8. Park, W. J., "An Optimal Design of Simple Symmetric Laminates Under First Ply Failure Criterion," *J. Composite Mater.*, 16(1982),

341-345.

9. Kam, T. Y., F. M. Lai and S. C. Liao, 1996, "Minimum Weight Design of Laminated Composite Plates Subject to Strength Constraint," *AIAA J.*, 34(8) 1699-1708.
10. Bushnell, D., "Truss-Core Sandwich Design via PANDA 2," *Proceedings of the AIAA/ASME/ ASCE/AHS 31st Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference (Long Beach, CA), AIAA, Washington, D.C., 1990, 1313-1332 (AIAA Paper 90-1070).*
11. Olsen, G. R., and Vanderplats, G. N., "Method for Nonlinear Optimization with Discrete Design Variables," *AIAA Journal*, 27(1989), 1584-1589.
12. Loos, A. C. and G. S. Springer, "Curing of Epoxy Matrix Composites," *Journal of Composite Materials*, 17, (1983), pp.135-169.
13. Zubrick, J.R., "Development of Nondestructive Methods for the Quantitative Evaluation of Glass-Reinforced Plastics," *AFML Technical Report TR-66-269, June, 1966.*
14. Adams, C. J., N. H. Radtke and J. D. Klein, "Ultrasonic Techniques and Standards for testing Filament-Wound Structures," *AFML Rept. TDR-64-117, May, 1964.*
15. Chen, P. I., H. X. Yang, and R. G. Gong, "Fatigue Life Prediction Using the Similitude Principle", *communications in RMSL, SAE, Vol. 3, No.1, 1996, pp.21-24.*



圖一：桁架式三明治複合材料結構視圖

表一 複合材料的材料常數

Material	Material constants					Strengths (Mpa)						Density $\rho(\text{kg}/\text{m}^3)$
	E_1	$E_2=E_2$	$G_{12} =$ G_{13}	G_{23} G_{23}	$\nu_{12} = \nu_{23}$ $= \nu_{13}$	X_T	X_C	$T_T =$ Z_T	$Y_C =$ Z_C	R	$S = T$	
複合材料	88.53 Gpa	6.72 Gpa	4.03 Gpa	1.022 Gpa	0.28	1560.1	1760.2	35.75	35.75	46.21	61.72	1450

表二 四邊固定之桁架式三明治複合材料構件受集中載重時，
首層破壞的一階剪變形理論值與古典板理論之比較

(每一層厚度 $t = 0.015 \text{ cm}$; $H_c/L = 0.05$; $R_c = 1 \text{ cm}$; 板長(L)= 10cm ; $\varphi_c = 45^\circ$)

試片角度	理論分析結果 (Tasi-Wu破壞準則) P_t (KN)	古典板理論 (Tasi-Wu破壞準則) P_f (KN)	誤差 (%) $\frac{ P_f - P_t }{P_f}$
$[45^\circ / -45^\circ]_s$	0.390 (a)	0.406	3.94
$[90^\circ / 0^\circ / 90^\circ]_s$	0.998	1.041	4.13
$[90^\circ / 0^\circ / 90^\circ / 0^\circ]_s$	1.212	1.296	6.48

(a) 本研究的理論分析結果 (一階剪變形理論)

表三 四邊固定之桁架式三明治複合材料構件受集中載重時的最佳化結果
($H_c/L = 0.05$; $R_c = 1 \text{ cm}$; 板長(L)= 10cm ; $\varphi_c = 45^\circ$, $P_c = 1000\text{N}$)

層組	NL=3	NL=4
最佳化結果	$[45_1 / -45_2]_s$	$[45_1 / -45_1 / 45_2]_s$