

行政院國家科學委員會專題研究計畫 成果報告

蒸氣流場下多層橢圓管之耦合熱彈分析

計畫類別：個別型計畫

計畫編號：NSC94-2212-E-164-002-

執行期間：94年08月01日至95年07月31日

執行單位：修平技術學院機械工程系

計畫主持人：李宗乙

計畫參與人員：王瓊淑、林政穎、連志豪

報告類型：精簡報告

處理方式：本計畫可公開查詢

中 華 民 國 95 年 10 月 14 日

# 蒸氣流場下多層橢圓管之耦合熱彈分析

計畫編號：NSC 94-2212-E-164-002

執行期限：94 年 8 月 1 日至 95 年 7 月 31 日

主持人：李宗乙 修平技術學院機械系

計畫參與人員：王瓊淑 伸東國小教師

計畫參與人員：林政穎、連志豪 修平技術學院機械系學生

## 摘要

本文主要是模擬異向性材料所組成的多層橢圓管在受熱與壓力耦合變化下，因壁內外邊界條件的差異而所產生的熱變形問題。而我們探討可分為內邊界和外邊界這二個部分，我們在內邊界部分管內開始加熱時利用熱力學蒸汽表模擬出蒸氣溫度和壓力的關係式當成邊界條件，溫度和壓力相互影響且隨時間變化下其暫態熱應力的分佈情形。而在外邊界部分我們假設為不同狀態而我們將使用有限差分法與拉氏轉換來處理此類問題。利用拉氏轉換法處理時間項，再利用矩陣相似轉換在轉換域上求得複變函數解。最後利用數值逆拉氏轉換，求得數值解。藉由本文除了可以了解圓管與橢圓管的變形與散熱差異外，也可了解耦合效應的影響情形。而橢圓管之材料性質也將採用真實之材料，使本文所得到的數值解更加接近真實解。

關鍵字：橢圓管、熱變形、拉氏轉換

## Abstract

This paper deals two-dimensional coupled thermoelastic problems for elliptical tube. The water vapor temperature and pressure relation assumed for the inner boundary. The water vapor temperature and pressure data were obtained from a thermodynamic steam table. Laplace transform and finite difference methods are used to analyze problems. Using the Laplace transform with respect to time, the general solutions of the governing equations are obtained in transform domain. The solution is obtained by using the matrix similarity transformation and inverse Laplace transform. We obtain solutions for the temperature and thermal deformation distributions in a transient and steady state. Moreover, the computational procedures established in this thesis, can solve the generalized thermoelasticity problem.

Keywords : Elliptical tube、thermal deformation、Laplace transform

## 前言

強化傳熱可以提升傳熱效率，降低換熱設備的製造成本，因而受到普遍重視。自 60 年代以來，強化傳熱已經成為傳熱學的一個比較重要的專門領域而得到迅速而蓬勃的發展。國內外許多學人針對橢圓管換熱開展了不同程度的研究[1-6]。目前國內工程上在處理橫截管束的強迫對流換熱時大部分採用了經驗公式進行設計計算，沒有比較完整的理論計算依據。Ali 和 McDonald[7]探討水平橢圓管問題，結果發現在非圓形剖面水平管中，具直立長軸之橢圓形狀其凝結熱傳效果遠高於圓形形狀。此後有更多的相關問題被發表，其中自由對流的橢圓管薄膜凝結的理論研究中[8-12]，大都採用 Nusselt 的凝結模式來進行分析，其中 Cheng 與 Tao[8]以數個圓弧來近似橢圓的曲面，並針對平均熱傳的效率加以探討，結果得到圓管與橢圓管傳熱面積相同的條件下，橢圓的偏心率由 0.3 至 0.6 範圍變動時，平均熱傳能有 10% 至 18% 的提升。Wang 等[9]及 Fieg 等[11]考慮水平橢圓管，並發現其長軸與鉛垂線夾角具變化條件下，角度為零時具有最大的平均熱傳量。Yang 等[10]、[12]考慮一水平橢圓管於凝結過程，由於曲率變化導致的表面張力因素，並以餘弦函數來描述變化的管壁溫度，也同樣得到熱傳效率提升的結論。關於強制對流模式的橢圓管薄膜凝結問題，Panday[13]明確的導出二維層流薄膜凝結的數值解法，除了具有沿鉛垂線方向流動蒸汽外，並納入凝結液膜的對流項、慣性力及

壓力梯度等，而汽液界面的剪力則仍採用 Shekriadez 等的模式。再者，同時具有自由-及強制對流之混合效應的水平橢圓管層流薄膜凝結[14-16]也相繼被提出，其中有等溫條件者，亦有等熱通量條件及可變壁溫條件的研究與討論。以上的文獻的探討都偏重於傳熱方面的研究，但在耦合熱彈方面的研究相對較少量，Chen 等[17-20]曾用混合數值法來求解多層圓柱的耦合熱彈解，得到不錯效果。於是本研究計劃預計採用此數值方法來求解橢圓管的耦合熱彈問題。

## 數學模式

我們分析之橢圓管為多層結構如(圖一)，而我們模擬橢圓管同時受到蒸氣流場的溫度與壓力的作用，所以我們在使用統御方程式時，選擇熱傳導與應力平衡式之耦合方程式，使其能更準確的模擬出其實際狀態。

熱傳導方程式表示如下：

$$[k_x \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2}{\partial y^2}] \Pi = \rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} + T_0 \beta_x \frac{\partial (\hat{u})}{\partial x} + T_0 \beta_y \frac{\partial (\hat{v})}{\partial y} \quad (1)$$

應力平衡方程式表示如下：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0 \quad (3)$$

應力-位移關係式：

$$\sigma_x = Q_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + Q_{12} \frac{\partial v}{\partial y} - \beta_x T \quad (4)$$

$$\sigma_y = Q_{12} \frac{\partial u}{\partial x} + Q_{22} \frac{\partial v}{\partial y} - \beta_y T \quad (5)$$

$$\tau_{xy} = Q_{66} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (7)$$

式中參數代表如下

$$\beta_x = \frac{E_x}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} (\alpha_x + \nu_{yx} \alpha_y)$$

$$\beta_y = \frac{E_y}{1 - \nu_{xy} \nu_{yx}} (\alpha_y + \nu_{xy} \alpha_x)$$

$$Q_{11} = \frac{E_x}{(1 - \frac{\nu_{xy} E_y}{E_x})}$$

$$Q_{22} = \frac{E_y}{(1 - \frac{\nu_{xy} E_x}{E_y})}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{xy} E_y}{(1 - \frac{\nu_{xy} E_x}{E_y})}$$

$$Q_{66} = G_{xy}$$

邊界條件表示如下：

$$\sigma = p(t), \quad T_1 = f_1(t) \quad \text{at } \Omega \text{ 橢圓內邊界}$$

$$\sigma = 0, \quad T_2 = f_2 \quad \text{at } \Omega \text{ 橢圓外邊界}$$

層與層間需滿足之連續性條件如下：

$$u_i = u_{i+1}; \quad \sigma_i = \sigma_{i+1}; \quad q_i = q_{i+1}; \quad T_i = T_{i+1}$$

$$i = 1, 2, \dots, m-1$$

由於上述的方程式都是在卡氏座標系統下所構成，要直接求解橢圓管溫度、位移、應力等參數有其困難性，於是我們將引入橢圓座標系統，來加以求解方程式(1)-(7)。

首先我們定義橢圓座標如下：

$$x = h \text{Cosh}[\xi] \text{Cos}[\eta]$$

$$y = h \text{Sinh}[\xi] \text{Sin}[\eta]$$

分別代入方程式(1)-(7)後，座標轉換後預計可得統御方程式如下：

$$a_i \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + b_i \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} = c_i \frac{\partial T}{\partial t} + d_i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) + e_i \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) \quad (8)$$

$$+ f_i \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right) + g_i \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \frac{\partial v}{\partial t} \right)$$

$$h_i \frac{\partial \sigma_\xi}{\partial \xi} + i_i \frac{\partial \tau_{\xi\eta}}{\partial \eta} + j_i \sigma_\xi + k_i \sigma_\eta + l_i \tau_{\xi\eta} = 0 \quad (9)$$

$$m_i \frac{\partial \tau_{\eta\xi}}{\partial \xi} + n_i \frac{\partial \sigma_\eta}{\partial \eta} + o_i \sigma_\xi + p_i \sigma_\eta + q_i \tau_{\xi\eta} = 0 \quad (10)$$

$$\sigma_{\xi k} = {}_1 Q_k \frac{\partial u}{\partial \xi} + {}_2 Q_k \frac{\partial v}{\partial \eta} - {}_3 Q_k T \quad (11)$$

$$\sigma_{\eta k} = {}_1 R_k \frac{\partial u}{\partial \xi} + {}_2 R_k \frac{\partial v}{\partial \eta} - {}_3 R_k T \quad (12)$$

$$\tau_{\xi\eta k} = {}_1 S_k \frac{\partial u}{\partial \xi} + {}_2 S_k \frac{\partial v}{\partial \eta} \quad (13)$$

在完成橢圓座標系統轉換後，我們將應力-位移關係式(11)-(13)，分別帶入方程式(9)與(10)中建立溫度(T)與位移(u, v)關係的應力平衡方程式。

我們使用中央差分法於推導後之統御方程式與應力-位移關係式後，可以得到其離散方程式。我們之所以採用差分法於本計劃中，主要是因為差分法在使用上較為便利，在計劃中只是將方程式空間項離散，而不需迭代收斂求解，故於求解時不會有很緩慢的情形發生。而在時間項上我們採用拉氏轉換來處理，因為運用此項技術之優點為不會有震盪收斂不下來的情形發生。

拉氏轉換定義如下：

$$\bar{\Phi}(s) = L[\Phi(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} \Phi(t) dt$$

$$\Phi(t) = L^{-1}[\bar{\Phi}(s)] = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} \bar{\Phi}(s) ds$$

於是對方程式取拉氏轉換後可得其新的統御方程式，將邊界條件與層間連續性條件分別代入新的統御方程式後，預估整理成其矩陣形式如下：

$$\{[A] - s[I]\}\{T_{\xi\eta}\} + s[B]\{u\} + s[C]\{v\} = [M] \quad (14)$$

$$[D]\{T_{\xi\eta}\} + [E]\{u\} + [F]\{v\} = 0 \quad (15)$$

$$[G]\{T_{\xi\eta}\} + [H]\{u\} + [L]\{v\} = 0 \quad (16)$$

將方程式 (15) 和 (16) 代入方程式 (14) 後整理可得如下：

$$\{[W] - s[I]\}\{\bar{T}_{\xi\eta}\} = \{\bar{Y}_{\xi\eta}\} \quad (17)$$

式中參數代表如下：

$$[W] = \{ \{ [B]^{-1}[C] - [E]^{-1}[F] \} \{ [H][E]^{-1}[F] - [L] \}^{-1} \{ [G] - [H][E]^{-1}[D] \} + \{ [B]^{-1} + [E]^{-1}[D] \} \}^{-1} [B]^{-1}[A]$$

$$[\bar{Y}] = \{ \{ [B]^{-1}[C] - [E]^{-1}[F] \} \{ [H][E]^{-1}[F] - [L] \}^{-1} \{ [G] - [H][E]^{-1}[D] \} + \{ [B]^{-1} + [E]^{-1}[D] \} \}^{-1} [B]^{-1}\{[M]\}$$

矩陣 [W] 為實數矩陣，對矩陣 [W] 作對角化  $[P]^{-1}[W][P] = \text{diag} [W]$ ，[P] 為特徵向量所組成矩陣。對角化矩陣  $\text{diag} [W]$  定義如下：

$$\text{diag}[W] = \begin{bmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_N \end{bmatrix} \quad (18)$$

這裡  $\lambda_j (j=1, 2, \dots, N)$  為矩陣 [W] 的特徵根。

將方程式(18) 代入方程式 (17) 可獲得以下方程式

$$\{[P]^{-1}[W][P] - s[P]^{-1}[I][P]\}\{P\}^{-1}\{\bar{T}_{\xi\eta}\} = [P]^{-1}\{\bar{Y}_{\xi\eta}\} \quad (19)$$

$$\{ \text{diag}[W] - s[I] \} \{ \bar{T}_{\xi\eta}^* \} = \{ \bar{Y}_{\xi\eta}^* \} \quad (20)$$

式中參數代表如下：

$$\{ \bar{T}_{\xi\eta}^* \} = [P]^{-1} \{ \bar{T}_{\xi\eta} \}$$

$$\{ \bar{Y}_{\xi\eta}^* \} = [P]^{-1} \{ \bar{Y}_{\xi\eta} \}$$

我們對方程式(20)進行求解

$$\bar{T}_{\xi\eta}^* = \frac{\bar{Y}_{\xi\eta}^*}{\lambda_j - s} \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (21)$$

對方程式(21)進行逆拉氏轉換，我們可以得到  $T_{\xi\eta}^*$ 。

再利用方程式(22), (23), (24)關係式解得溫度分佈  $T_{\xi\eta}$  和位移分佈  $u$  和  $v$ 。

$$\{T_{\xi\eta}\} = [P]\{T_{\xi\eta}^*\} \quad (22)$$

$$\{v\} = \{ [H][E]^{-1}[F] - [L] \} \{ [G] - \{ [H][E]^{-1}[D] \} \}^{-1} \{ T_{\xi\eta} \} \quad (23)$$

$$\{u\} = -[E]^{-1}[D]\{T_{\xi\eta}\} - [E]^{-1}[F]\{v\} \quad (24)$$

我們將解得的溫度  $T_{\xi\eta}$  和位移  $u, v$  代入方程式 (11), (12), 和 (13) 後，我們可以得到應力  $\sigma_{\xi}$ 、 $\sigma_{\eta}$  和剪應力  $\tau_{\xi\eta}$  的變化分佈情形。

## 數值結果與討論

在本文中我們提出橢圓管受溫度與壓力變化時暫態溫度、位移和應力分佈的情

形。我們所分析的物理模式為一多層橢圓管(圖 1)。為了方便求解來說,在本文裡考慮使用等向性材料來分析問題。文中所使用的材料參數列於表 1。內部和外部溫度分別被假設為  $f(t)$  和 0。內部和外部壓力分別被假設為  $p(t)$  和 0。溫度在兩個末端都假設為 0。圖 2 為溫度與壓力關係圖。圖 3 為溫度與時間的關係圖。圖 4 為壓力與時間的關係圖。圖 5 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $T$  溫度分佈情形,圖 6 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $u$  位移分佈情形,藉由此圖我們可以得知最大位移的發生位置。圖 7 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $v$  位移分佈情形,我們由此圖可以發現其位移的變化情形與  $u$  方向的位移變化模式是不一樣的。圖 8 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\zeta$  應力分佈情形,從圖中可以明顯的看出所分析的橢圓管最大應力發生位置,因中間位置溫度較高故應力也較大。圖 9 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\theta$  應力分佈情形,其應力最大發生於中間位置與  $\sigma_\zeta$  應力值和分佈的情形並不一樣。圖 10 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\eta$  應力分佈情形。圖 11 為  $t=5$  時沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\tau_{\zeta\eta}$  剪應力分佈情形,我們如果將四個應力圖來做一比較其結果顯示這個剪應力與其他應力相比較非常小。由此可見在熱彈應力中,剪應力的影響是極小的,幾乎可以不必擔心其所造成的破壞。

## 結論

在文章裡,我們討論模擬橢圓管的耦合熱彈問題,邊界受到時間有關的溫度和壓力變化問題。利用有限差分、拉氏變換方法與矩陣相似轉換等數值方法來獲得數值結果。而此法稱為混合數值法,此法的優勢是需求在計算機存儲器上少於傳統的迭代方法。混合的數值法也具有高效率、準確和能有效地消除數字擴散和動盪無法收斂的問題。這種可行的方法,容易被延伸到解決大

範圍物理工程問題。本文之結果可以提供分析橢圓元件上的熱彈問題,對目前蓬勃發展的工業有相當大的貢獻。可為目前廣泛應用的加工技術提供一種精確又有效率的分析方法,對工業界有相當大的助益。

## 參考文獻

1. Fowler, A.J., Ledezma, G.A., Bejan, A., 1997, "Optimal geometric arrangement of staggered plates in forced convection," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.40 (8), pp. 1975-1805.
2. Stanescu, G., Fowler, A.J., Bejan, A., 1996, "The optimal spacing of cylinders in free-stream cross-flow forced convection," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.39 (2), pp. 311-317
3. Rocha, L.A.O., Saboya, F.E.M., Vargas, J.V.C., 1997, "A comparative study of elliptical and circular section in one and two-row tubes and plate fin heat exchangers," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol.18, pp. 247-252.
4. Fowler, A.J., Bejan, A., 1994, "Forced convection in banks of inclined cylinders at low Reynolds numbers," *Int. J. Heat Fluid Flow*, Vol. 15, pp.90-99.
5. Matos, R.S., Vargas, J.V.C., Laursen, T.A., Saboys, F.E.M., 2001, "Optimization study and heat transfer comparison of staggered circle and elliptic tubes in forced convection," *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 44, pp. 3953-3961.
6. Bejan, A., Morega, A.M., 1993, "Optimal arrays of pin fins and plate fins in laminar forced convection," *J. Heat Transfer*, Vol.115, pp. 75-81.
7. Ali, A. F. M. and McDonald, T. W., 1977,

- “Laminar film condensation on horizontal elliptical cylinders: a first approximation for condensation on inclined tubes,” ASHRAE Trans., Vol.83, No.2,pp.242-249
8. Cheng. S., and Tao, J., 1988, “Study of condensation heat transfer for elliptical pipes in stationary saturate vapor,” Proceedings of National Heat transfer conference, Vol. 2, ASME HTD-Vol. 96, pp. 405-408.
  9. Wang, J. C. Y., Ma, Y. and Liu, J., 1991, “Vapor condensation on a horizontal elliptical tube,” Proceedings of the XVIII th International Congress of Refrigeration, Paper No. 160, Montreal, Canada.
  10. Yang, S. A. and Chen, C. K., 1993, “Flowwise condensation on non-isothermal horizontal elliptical tubes with surface tension,” J. of Thermophysics and Heat Transfer Vol. 7, No. 4, pp. 729-732.
  11. Fieg, G. P. and Roetzel, W., 1994, “Calculation of laminar film condensation in/on inclined elliptical tubes,” Int. J. Heat and Mass Transfer, Vol. 37(4), pp. 619-624.
  12. Yang, S. A. and Chen, C. K., 1994, “Laminar film condensation on a horizontal elliptical tubes with variable wall temperature,” J. of Heat Transfer Vol. 116, pp. 1046-1049.
  13. Panday, P. K., 1987, “Laminar film condensation of downward flowing vapor on a horizontal elliptical cylinder – a numerical solution,” Int. Communication on Heat and Mass Transfer, Vol. 14, pp.33-43.
  14. Yang, S. A. and Hsu, C. H., 1997, “Mixed–convection film condensation on a horizontal elliptical tube with uniform surface heat flux,” Numerical Heat Transfer; Part A: Applications, Vol. 32, pp.85-95
  15. Memory, S. B., Adams, V. H. and Marto, P. J., 1997, “Free and forced convection laminar film condensation on horizontal elliptical tubes,” Int. Heat and Mass Transfer, Vol. 40, No. 14, pp. 3395-3406.
  16. Yang, S. A. and Hsu, C. H., 1999, “Mixed – convection film condensation on a horizontal elliptical tube with variable wall temperature,” J. of the Chinese Society of Mechanical Engineers, Vol. 20, No. 4, pp. 373-384
  17. Chen, C. K., Hung, C. I. and Lee, Z. Y., 2001, “Transient Thermal Stresses Analysis of Multilayered Hollow Cylinder,” ACTA Mechanica, 151, pp.75-88.
  18. Chen, C. K., Hung, C. I. and Lee, Z. Y., 2001, “Transient Thermal Stresses Analysis of Multilayered Hollow Cylinder,” ACTA Mechanica, 151, pp.75-88.
  19. Lee, Z. Y., Chen, C. K. and Hung, C. I. 2001, "Thermoelastic Transient Response of Multilayered Hollow Cylinder With Initial Interface Pressure," Journal of thermal stresses, vol. 24, pp.987-1006,
  20. Lee, Z. Y., 2004," Hybrid Numerical Method Applied to 3-D Multilayers Hollow Cylinder with Time-Dependent Boundary Conditions," Applied Mathematics and Computation, vol.150, pp.25–43,
  21. Wylen, G. V., Sonntag, R. and Borgnakke, C., ”Fundamentals of Classical Thermodynamics,” Fourth Edition, New York

### 符號說明

$\lambda$	Lame' s 常數
$\rho$	密度
$C_v$	比熱
$T_0$	參考溫度
$\nu_{\zeta\eta}$	浦松比
$f_1, f_2$	內外層溫度
$f_3, f_4$	端面溫度
$T$	溫度
$t$	時間
$\zeta, \theta, \eta$	橢圓座標
$k_{\zeta}, k_{\theta}, k_{\eta}$	熱傳導係數
$\alpha_{\zeta}, \alpha_{\theta}, \alpha_{\eta}$	線膨脹係數
$E_{\zeta}, E_{\theta}, E_{\eta}$	楊氏係數
$\sigma_{\zeta}, \sigma_{\theta}, \sigma_{\eta}$	應力

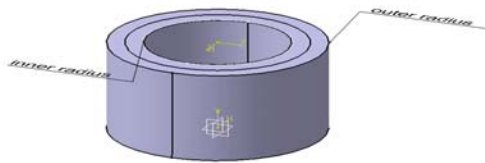


圖 1 多層橢圓管物理模式

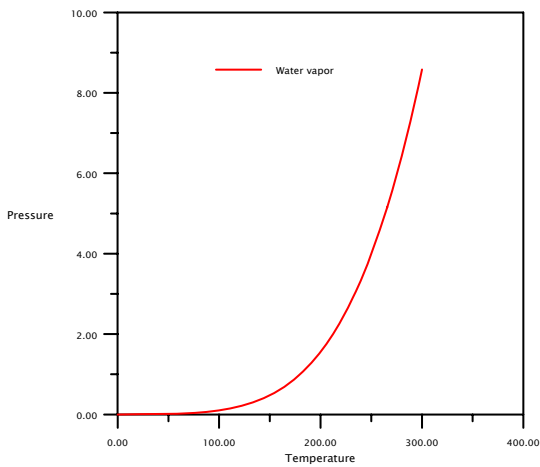
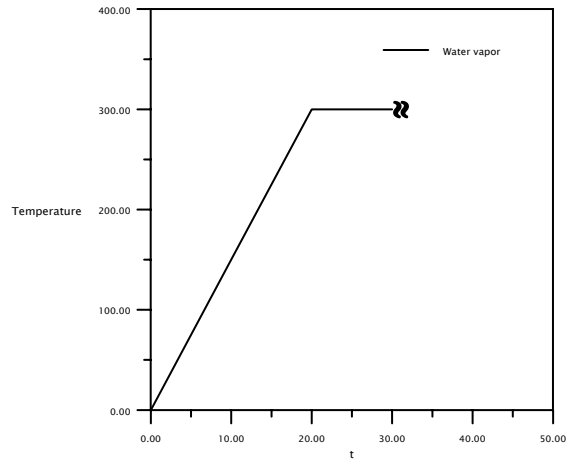
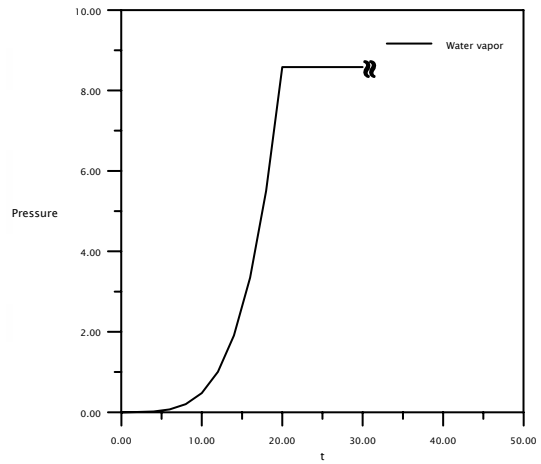


圖 2 溫度與壓力關係圖(quality 90%)



$$f(t) = \begin{cases} 15t & , 0 \leq t \leq 20 \\ 300 & , t > 20 \end{cases}$$

圖 3 溫度與時間的關係圖



$$p(t) = \begin{cases} -0.00013995t + 0.00461523t^2 - 0.00112473t^3 \\ + 0.00060406t^4 & , 0 \leq t \leq 20 \\ 8.585 & , t > 20 \end{cases}$$

圖 4 壓力與時間的關係圖

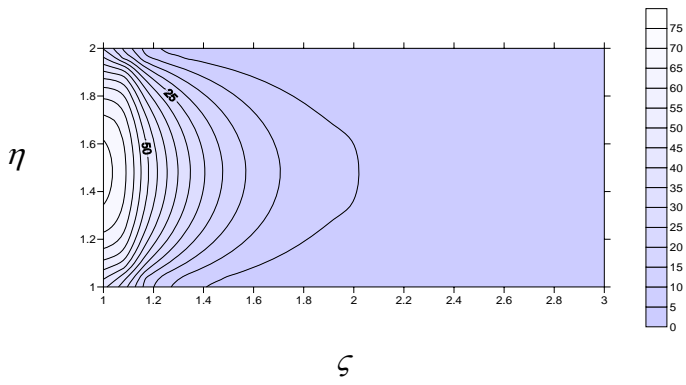


圖5 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $T$  溫度分佈在  $t=5$

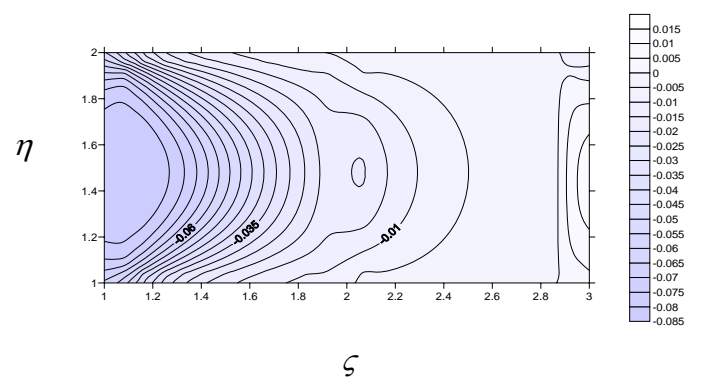


圖8 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\zeta$  應力分佈在  $t=5$

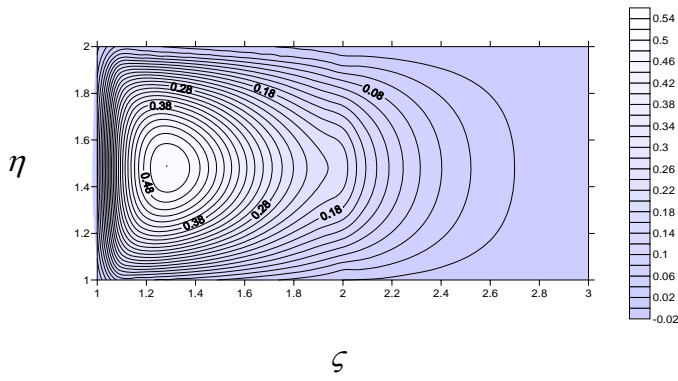


圖6 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $u$  位移分佈在  $t=5$

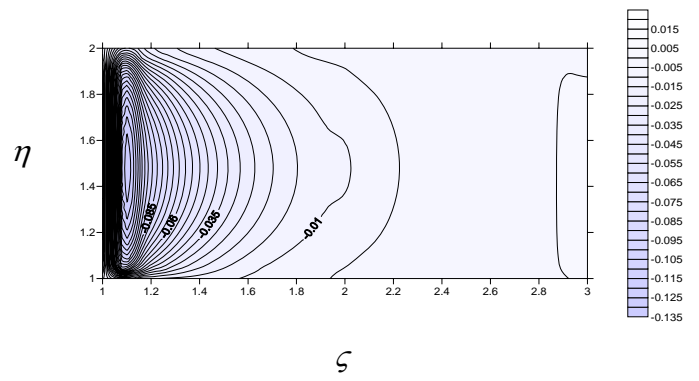


圖9 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\theta$  應力分佈在  $t=5$

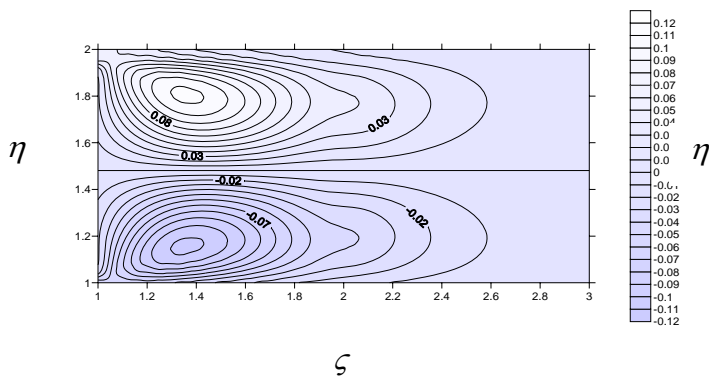


圖7 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向的  $v$  位移分佈在  $t=5$

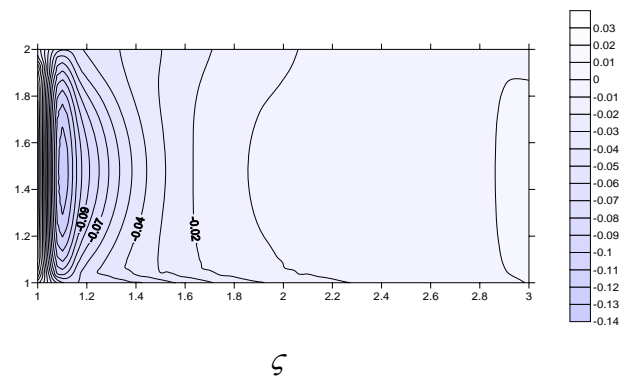


圖10 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\sigma_\eta$  應力分佈在  $t=5$



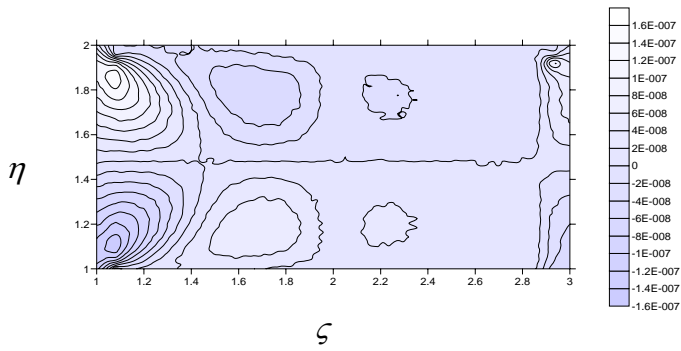


圖11 沿著  $\zeta$  方向和  $\eta$  方向  $\tau_{\zeta\eta}$  剪應力分佈在  $t=5$

表 1. 材料參數

	Layer 1	Layer 2
$E_{\zeta} = E_{\theta} = E_{\eta} \left( \frac{N}{m^2} \right)$	58E6	50E6
$k_{\zeta} = k_{\theta} = k_{\eta} \left( \frac{Watt}{m \cdot K} \right)$	22	10
$\alpha_{\zeta} = \alpha_{\theta} = \alpha_{\eta} \left( \frac{1}{K} \right)$	4E-6	2E-6
$\nu_{\zeta\theta} = \nu_{\theta\zeta}$	0.2	0.4
$\nu_{\zeta\eta} = \nu_{\eta\zeta}$	0.2	0.4
$\nu_{\eta\theta} = \nu_{\theta\eta}$	0.2	0.4
$G_{\zeta\eta} \left( \frac{N}{m^2} \right)$	58E6	50E6
$\rho \left( \frac{kg}{m^3} \right)$	0.095	0.085
$C_v \left( \frac{kJ}{kg \cdot K} \right)$	0.3	0.2